האלכסון הנסתר

פרק דוגמה בספר הגאומטריה, אחרי פרקי זוויות ישרות וריבועים. משפט פיתגורס, בשתי עטיפות על שלד אחד.

למה פיתגורס

משפט פיתגורס הוא הדוגמה המושלמת למחלה שהשיטה מרפאת:

- מדקלמים אותו בכל מקום בלי למה: "a בריבוע ועוד b בריבוע שווה c בריבוע, קדימה תרגילים".
- יש לו סיפור היסטורי עשיר בשני הזרמים - ובגרסה התורנית הוא דווקא דרמטי יותר.
- יש לו משבר אמיתי בלב הסיפור: האלכסון מתברר כמספר שאי אפשר לכתוב בדיוק. החכמים ידעו את זה לפני מאות שנים.
- יש לו נסיון בפועל שכל ילד יכול לעשות היום: חבל עם 12 קשרים.

מבנה הפרק

שתי הגרסאות עוברות את אותן 9 תחנות, אותה נוסחה, אותה הוכחה, אותו נסיון ואותם תרגולים - וגם את אותה ליבה היסטורית תורנית (משנה, תוספות, רמב"ם). ההבדל היחיד: גרסת החול מוסיפה סביב הליבה את המסע העולמי - בבל, יוון, והמשבר של היפאסוס.

כל פרק עובר 9 תחנות: 1. סיפור מסגרת אמיתי, 2. סיפור פנימי, 3. היסטוריה, 4. מה זה, 5. למה זה עובד, 6. איך משתמשים, 7. נסיון בפועל, 8. תרגולים, 9. גשר לפרק הבא.

ליבה משותפת לשתי הגרסאות

מה זה (סימון מודרני): במשולש ישר זווית, a בריבוע + b בריבוע = c בריבוע.

למה זה עובד: הוכחת ההזזה - ריבוע גדול שמכיל 4 עותקים של אותו משולש, מסדרים אותם מחדש, והשטח שנשאר מוכיח את השוויון. הלומד רואה, לא משנן.

איך משתמשים: בנאים בודקים זווית ישרה בלי מד זווית, מודדים מרחקים בלי להגיע אליהם, ניווט ו-GPS, וגם גודל המסך של הטלוויזיה - זה האלכסון.

נסיון בפועל: קושרים חבל עם 12 קשרים במרחקים שווים, מקופלים למשולש 3-4-5 - ומקבלים זווית ישרה מושלמת. אחר כך: מודדים את החדר ומנבאים את האלכסון בלי למדוד אותו.

תרגולים (רק עכשיו): מדורגים - קודם שלשות שלמות (3-4-5, 5-12-13), אחר כך בעיות מדידה מהחיים, ולבסוף האתגר: תוכיחו שהאלכסון של ריבוע שצלעו 1 לא יכול להיות שבר.

גשר לפרק הבא: אם האלכסון לא שבר - אז מה הוא? הפרק הבא: שורשים, והמספרים שאי אפשר לכתוב.

גרסה תורנית

סיפור מסגרת אמיתי לספר כולו: "שרשרת המדידה". הספר עוקב אחרי דורות של אנשים אמיתיים, ושל כתבי היד שלהם, שרדפו אחרי אותה שאלה: איך מודדים בדיוק. חכמי התלמוד, בעלי התוספות, ר׳ אברהם בר חייא בספרד, הרמב"ם, התשב"ץ. כל פרק מציג חוליה אחת בשרשרת, מי שאל, מה ענה, ומה השאיר למי שאחריו. הלומד לא קורא על דמות בדויה, הוא נכנס לשרשרת אמיתית ומצטרף אליה. כל עובדה בסיפור מתועדת במקור. אפשר לספר בדרמטיות, אבל לא להמציא דמויות, מקרים או ציטוטים.

הסיפור הפנימי של הפרק (חוליית האלכסון): בתלמוד (עירובין נז ע"א) נקבע כלל מדידה, והוא עולה בדיון על תחום שבת, כמה מותר ללכת מחוץ לעיר:"כל אמתא בריבועא - אמתא ותרי חומשי באלכסונא". כלומר: האלכסון של ריבוע ארוך מהצלע פי 1.4. הלומד מקבל ריבוע אמיתי, 1 על 1 אמה (כ-50 ס"מ), מודד את האלכסון בעצמו, ומגלה שיוצא קצת יותר מ-1.4. זו בדיוק השאלה שהטרידה את בעלי התוספות: הם כותבים שהחשבון אינו מכוון, ושאפשר לראות זאת במדידה (תוספות סוכה ח ע"א ד"ה "כל אמתא", ובמקביל בעירובין נז ע"א. בעלי התוספות מראים זאת בריבוע 10 על 10: לפי הכלל, חצי הריבוע ייצא 49 ולא 50). מכאן השאלה שמקדמת את השרשרת: אם 1.4 לא מדויק, מה האורך האמיתי, ומי ניסה למצוא אותו?

היסטוריה (מקורות תורניים בלבד)

- חכמי התלמוד קובעים כלל מדידה: "כל אמתא בריבועא - אמתא ותרי חומשי באלכסונא" (עירובין נז ע"א). האלכסון = הצלע כפול 1.4.
- בעלי התוספות (סוכה ח ע"א ד"ה כל אמתא) בודקים ומציינים שהחשבון אינו מכוון: "איכא טפי פורתא", יש קצת יותר. ההוכחה שלהם: ריבוע 10 על 10 מחולק לארבעה ריבועים של 5 על 5, ובתוכו ריבוע מוטה ששטחו חצי, כלומר 50. לפי הכלל 1.4 הצלע שלו 7 והשטח 49. אורך האלכסון האמיתי הוא כ-1.414.
- בסוגיית הסוכה העגולה (סוכה ח ע"א) משתמשים בשני הקירובים יחד: אלכסון פי 1.4 מהצלע, והיקף פי 3 מהקוטר. ריבוע שצלעו אמה, אלכסונו אמה ושני חומשים, והיקף

העיגול החוסם אותו הוא 3 כפול 1.4, כלומר 4.2 לכל צלע, ובסך הכול”שש עשרה וארבעה חומשים" לארבע צלעות. רבי יוחנן נתן שיעור מקורב בלבד.

- ר׳ אברהם בר חייא הנשיא, מחכמי המדידה של ספרד, נותן שיעור מדויק יותר: אחת ושני חומשים ועוד כמעט חלק אחד משבעים. זה בערך 1.4142.
- הרמב"ם, בפירוש המשניות (עירובין א, ה, וכן ב, ה), קובע שאת האלכסון אי אפשר לדעת בדיוק גמור, לא מחולשה אלא מטבע החשבון, ולכן חכמים השתמשו בקירוב.
- התשב“ץ דן מאוחר יותר בשאלה למה בהלכה מסתפקים בקירוב (שו”ת תשב"ץ, סימן קסה - מספר הסימן לאימות).

כלומר: מאות שנים לפני שהמושג “מספר אי רציונלי” קיבל שם, חכמים ידעו שהאלכסון הוא מספר מסוג אחר לגמרי.

גרסת חול

סיפור מסגרת אמיתי לספר כולו: “הלוח של פלימפטון”. הספר עוקב אחרי חפץ אמיתי אחד, לוח חרס בבלי בשם פלימפטון 322, ואחרי האנשים שנגעו בו. גם כאן כל עובדה מתועדת, אין דמויות בדויות.

ציר הסיפור (מתועד):

- לוח חרס מעיר לרסה בדרום עיראק של היום, בן כ-3,700 שנה (הערכה: בין 1820 ל-1762 לפנה"ס), מכיל טבלה של ארבע עמודות ו-15 שורות של מספרים.
- סביב 1922 סוחר העתיקות אדגר ג׳יימס בנקס מוכר אותו לאיש ההוצאה לאור ג׳ורג׳ ארתור פלימפטון, בכ-10 דולר. בנקס, מטפס על הר ארארט וסוחר עתיקות, מכונה לעיתים השראה לדמות אינדיאנה ג׳ונס.
- פלימפטון מוריש את האוסף שלו לאוניברסיטת קולומביה ב-1936. הלוח יושב שם בלי שמבינים מה יש בו.
- ב-1945 המתמטיקאי אוטו נויגבאואר והאשורולוג אברהם זקס מפרסמים: המספרים בלוח הם שלשות פיתגוריות, כלומר מקיימות a בריבוע + b בריבוע = c בריבוע, יותר מאלף שנה לפני פיתגורס.
- והוויכוח נמשך עד היום: מה הלוח היה? אלינור רובסון טוענת (2002) שזה כלי עזר למורה, מקור לבעיות לתלמידים. דניאל מנספילד ונורמן וילדברגר (2017) טוענים שזו טבלת טריגונומטריה בבלית. חוקרים אחרים דחו את הטענה הזו כאנכרוניסטית, כי לבבלים לא היה

מושג של זווית נמדדת. כל פרק בספר מוסיף עוד חוליה: מי השתמש ברעיון, באיזו תרבות, ומה זה אומר על השאלה "בשביל מה הלוח".

הסיפור הפנימי של הפרק: הלומד עומד במקום של נויגבאואר ב-1945. מול עיניו שורות של מספרים בלי הסבר. הוא בודק שורה אחרי שורה, ומגלה שבכל שורה שני ריבועים מסתכמים בריבוע שלישי. הבעיה: הלוח בן כמעט 4,000 שנה, יותר מאלף שנה לפני פיתגורס. אז מי באמת "גילה" את המשפט? והשאלה שעדיין פתוחה: בשביל מה הבבלים בנו טבלה כזו?

היסטוריה (מסע אחד, עם עצירה חובה גם בבית)

- בבל, כ-1,800 לפנה"ס: הלוח מוכיח שהכלל היה ידוע לפחות אלף שנה לפני יוון. (ובאותו אוסף של לוחות בבליים יש גם שאלות מדידה ובנייה רגילות.)
- יוון: פיתגורס מקים אגודה שרואה במספרים את סוד היקום. על פי האגדה (ולא מקור מתועד היטב), היפאסוס מוכיח שאלכסון הריבוע אינו שבר של שלמים, והאגודה מטביעה אותו בים. מאחורי האגדה משבר אמיתי: הגילוי ניפץ את האמונה שהעולם בנוי מיחסים שלמים.
- ארץ ישראל וספרד, אותה שאלה מבפנים: התלמוד קובע "כל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא" (עירובין נז ע"א) - האלכסון פי 1.4 מהצלע. בעלי התוספות מציינים שהחשבון אינו מכוון. ר' אברהם בר חייא נותן שיעור מדויק יותר. והרמב"ם (פירוש המשניות, עירובין א, ה וב, ה) קובע שאת האלכסון אי אפשר לדעת בדיוק גמור, לא מחולשה אלא מטבע המספר.
- העת החדשה: נויגבאואר וזקס (1945) מפענחים את הלוח, ומאז הוא נחקר, ונשאר שנוי במחלוקת (רובסון מול מנספילד ווילדברגר).
- המסקנה: אותו סוד התגלה במקומות שונים ובשפות שונות, והפרק היהודי בסיפור הזה הוא חלק מההיסטוריה של כולנו, לא סיפור צד.

מה הפרק מדגים

למה הפרק הזה מוכיח שהשיטה עובדת:

1. אותו שלד בדיוק שרת שני קהלים שונים לחלוטין. בנינו פעם אחת, הלבשנו פעמיים.
2. הליבה ההיסטורית התורנית חזקה במיוחד - הרמב"ם קובע שהאלכסון לעולם לא יימדד בדיוק, מאות שנים לפני שלמושג"מספר אי רציונלי" קראו בשם - ולכן היא לא עטיפה של זרם אחד אלא ליבה משותפת. בגרסה התורנית היא כל הסיפור; בגרסת החול היא עצירת חובה במסע העולמי. תרבות וזהות, לא דת.

3. שני הסיפורים מסתיימים באותה נקודת מתח: “אם זה לא שבר, מה זה?” - אותה סקרנות, אותו גשר לפרק הבא.

4. אותו נסיון בפועל ואותם תרגולים - אף ציבור לא מקבל פחות מתמטיקה.

הערת יישור: בגרסה התורנית צריך ליווי של רב/משגיח תוכן שיאשר את הציטוטים והלשון. המקורות כאן (תלמוד עירובין נז ע“א, עו ע”ב, סוכה ח ע“א, תוספות שם, רמב”ם פירוש המשניות עירובין א ה וב ה, ר׳ אברהם בר חייא, תשב“ץ) אומתו מול מקורות אינטרנטיים; מספר סימן התשב”ץ אומת (תוספות סוכה ח ע“א ד”ה כל אמתא) - אבל הניסוח הסופי לספר צריך עין מומחה.

מקורות

מקורות לסיפור פלימפטון 322 (אומתו):

- Mansfield, Foundations of Science 2021: https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-021-09806-0 (בנקס מכר לפלימפטון בערך 1922, הוריש לקולומביה ב-1936, נויגבאואר וזקס 1945)
- Robson, MAA: https://old.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Robson105-120.pdf (10 דולר, לרסה/סנקרה)
- Columbia Magazine: https://www.magazine.columbia.edu/article/babylon-revisited (בנקס והשראת אינדיאנה ג׳ונס, 1945, מחלוקת)
- Columbia Libraries, תיארוך 1762-1820 לפנה"ס: https://online-exhibitions.library.columbia.edu/exhibits/show/jewels/themes/science/158
- Mansfield & Wildberger 2017, Historia Mathematica: https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001
- Robson 2001: https://doi.org/10.1006/hmat.2001.2317
- ביקורת: https://www.scientificamerican.com/blog/roots-of-unity/dont-fall-for-babylonian-trigonometry-hype/ מקורות נוספים לתורני: תוספות סוכה ח ע“א ד”ה כל אמתא https://www.dafyomi.co.il/sukah/tosfos/su-ts-008.htm , סוגיית סוכה ח ע“א https://shoresh.app/texts/Sukkah_8a , Tsaban and Garber, On the Rabbinical Approximation of π, Historia Mathematica 25 (1998) 75-84: https://doi.org/10.1006/hmat.1997.2185 (עותק: https://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/Pdf/PublishedBackUp/HebpiBU.pdf). מקורות

לשרשרת הדיון התורני:
https://www.talmudology.com/jeremybrownmdgmailcom/2020/10/12/eruvin-76b-mathematical-error ,
https://dafdigest.org/masechtos/Eruvin%20057.pdf ,
https://dafyomi.co.il/parsha/masei5.htm (רמב"ם עירובין א ה וב ה), ר' אברהם בר חייא (1/70 כמעט+1+2/5):
http://dmle.icmat.es/pdf/GACETAMATEMATICA_1980_32_07-08_02.pdf

מקורות ללשון (בנוסף): https://seder-olam.com/en/n/masora/ ,
https://www.ezrabrand.com/p/counting-the-covenant-the-history ,
https://www.encyclopedia.com/religion/encyclopedias-almanacs-transcripts-and-maps/masorah , Ofer and Lubotzky, The Masorah as an Error Correcting Code:
https://openscholar.huji.ac.il/sites/default/files/jstudies/files/_file_1409486864.pdf , https://geniza.princeton.edu/en/people/dunash-ben-labrat/ ,
https://en.wikipedia.org/wiki/Dunash_ben_Labrat ,
https://jewishencyclopedia.com/articles/11560-nissim-ben-jacob-ben-nissim-ibn-shahin